FUNCION DE WEIERSTRASS

Notas de clase – 25/11/11

Geometría Fractal

Victoria Arcón

Función de Weierstrass

Introducción

1872 _ Weierstrass publica la función.

$$f_{a,b}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_{a,b}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \pi t) \qquad 0<a<1$$

$$b \in \mathbb{N} \text{ par}: \ a.b > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

como ejemplo de funcion continua y no diferenciable, descartando así la conjetura de que las funciones continuas debían ser diferenciables salvo en un conjunto de puntos "chico" (puntos aislados, de medida cero).

a) continuidad y buena definición:

Por el M-test, $|a^n \cdot \cos(b^n \pi t)| < |a|^n = a^n$ con $0<a<1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n < \infty.$$

$\therefore$ conv uniformemente

Ademas, las sumas parciales son continuas por ser suma de funciones continuas.

Luego, F debe ser continua.

b) No diferenciable: Ver artículo de Hardy [4]

1916 _ Hardy en su artículo "Weierstrass non-differentiable function" hace un análisis detallado de $f_{a,b}$ para distintos valores de a, b y concluye, entre otras cosas, que es suficiente pedir:

$0<a<1$

$b \in \mathbb{N}: a.b > 1 \quad (\Rightarrow b>1)$

para asegurar la continuidad y no diferenciabilidad.

Esto permite reescribir $f_{a,b}(t)$; de ahora en más y acorde a la bibliografía llamada $w(t)$, como sigue:

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-\alpha n} \cdot \cos(b^n 2\pi t) \qquad \text{con} \qquad \alpha = \frac{-\log a}{\log b}$$

Obs: $0<\alpha<1$:

$$\left.\begin{array}{l}\log a < 0\\ \log b > 0\end{array}\right\} \frac{-\log a}{\log b} > 0 \checkmark \qquad \left.\begin{array}{l}a.b>1\\ \log(ab) > \log(1)\\ \log a + \log b > 0\end{array}\right\} \frac{-\log a}{\log b} < 1 \checkmark$$

Aclaración:

- el 2π aparece únicamente para que el período de w sea 1; pero bien podría no estar
- la función coseno puede reemplazarse por la del seno o por cualquiera periódica continua y acotada; las cosas dichas en esta clase seguirían valiendo.

Más tarde, estas funciones resultaron atractivas para el estudio de curvas fractales principalmente por la estructura fina de sus gráficos (a cualquier escala éstos presentan oscilaciones; lo cual contrasta justamente con aquellos gráficos de funciones diferenciables que tienden, al ampliarse, a asemejarse a una recta) y en menor medida, por su autosimilaridad.

Aún hoy el cálculo de la dimensión de Hausdorff del gráfico de w es un problema abierto; si bien la bibliografía apunta, desde variadísimos enfoques, al valor $2-\alpha$ no se ha conseguido una demostración rigurosa.

En esta clase vamos a calcular la dimensión box del gráfico, lo cual nos proporciona una cota superior para la Hausdorff y mostraremos una cota inferior que, para valores suficientemente grandes de b, tiende al valor deseado.

Cota superior para la $\dim_H$ (Graf w): cálculo de la $\dim_B$ (Graf w)

Def: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Hölder de orden α si $\exists\ 0<c<\infty$ tq

$$|f(x)-f(y)|\leq c\cdot|x-y|^{\alpha}\qquad\forall\ x,y\in[a,b]$$

Prop 1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Hölder de orden α en $[a,b]$. Entonces $\overline{\dim}_B(\mathrm{Graf}\ f)\leq 2-\alpha$

D/ Sea $0<\delta<1$ $\Rightarrow \exists\, m\in\mathbb{N}$ tq $\frac{b-a}{\delta}\leq m<\frac{b-a}{\delta}+1$

Luego, $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{m} I_i$ con $\ell(I_i)=\delta$ (Not: ℓ = medida Lebesgue)

Como para cada $1\leq i\leq m$ vale la desigualdad Hölder

$$|f(x)-f(y)|\leq c\cdot|x-y|^{\alpha}\leq c\cdot\delta^{\alpha}\qquad\forall\ x,y\in I_i$$

se tiene que:

$$N_\delta(\mathrm{Graf}\ f|_{I_i})\leq\frac{c\cdot\delta^{\alpha}}{\delta}+2=c\cdot\delta^{\alpha-1}+2\qquad\forall\ 1\leq i\leq m$$

(el "+2" aparece pues se piensa al N_δ como el número de "cuadraditos" que intersecan el Graf $f|_{I_i}$ en una grilla de tamaño δ)

Luego, $N_\delta(\text{Graf } f) \leq m \cdot (c \cdot \delta^{\alpha-1}+2) \leq \left(\frac{b-a}{\delta}+1\right)\left(c \cdot \delta^{\alpha-1}+2\right) =$

$$= (b-a)\, c \cdot \delta^{\alpha-2} + 2(b-a)\,\delta^{-1} + c \cdot \delta^{\alpha-1} + 1 =$$

$$= \delta^{\alpha-2}\Big[c \cdot (b-a) + 2(b-a) \cdot \underbrace{\delta^{\overbrace{(1-\alpha)}^{>0}}}_{<1} + c \cdot \underbrace{\delta}_{<1} + 2\,\underbrace{\delta^{\overbrace{2-\alpha}^{>0}}}_{<1}\Big]$$

$$\leq \delta^{\alpha-2}\,\underbrace{(c \cdot (b-a) + 2(b-a) + c + 2)}_{:=c'}$$

$$\therefore \quad N_\delta(\text{Graf } f) \leq c' \cdot \delta^{\alpha-2}$$

$$\frac{\log N_\delta(\text{Graf } f)}{-\log \delta} \leq \frac{\log(c' \cdot \delta^{\alpha-2})}{-\log \delta} \qquad \leftarrow (0<\delta<1)$$

Tomando $\limsup_{\delta \to 0}$ se obtiene:

$$\overline{\dim}_B(\text{Graf } f) = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(\text{Graf } f)}{-\log \delta} \leq \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log(c' \cdot \delta^{\alpha-2})}{-\log \delta} =$$

$$= \limsup_{\delta\to 0} \overbrace{\frac{\log c'}{-\log \delta}}^{\to 0} + \frac{(\alpha-2) \cdot \log \delta}{-\log \delta} = \underline{2-\alpha}$$

■

Notar que, en la demostración, fue necesaria la validez de la desigualdad Hölder para $|x-y| \leq \delta < \delta_0 = 1$; hecha esta aclaración vamos a enunciar la siguiente proposición.

<u>Prop 2 (Corolario)</u>: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ cont tq $\exists\ 0<c<\infty,\ \delta_0>0$:

$\forall x \in [a,b] \wedge \forall \delta < \delta_0\ \exists\ y \in [a,b]$ que cumple

(a) $|x-y| < \delta$

(b) $|f(x)-f(y)| \geq c \cdot \delta^{\alpha}$

Entonces, $\underline{\dim}_B(\text{Graf } f) \geq 2-\alpha$

D/ Sea $0<\delta<\min\{\delta_0, 1\}$ $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ tq $\frac{b-a}{\delta} \leq m < \frac{b-a}{\delta}+1$

Luego, $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_i$ y para cada $1 \leq i \leq m$ vale que

$$N_\delta(\text{Graf } f|_{I_i}) \geq \frac{c \cdot \delta^{\alpha}}{\delta} = c \cdot \delta^{\alpha-1}$$

Entonces, $N_\delta(\text{Graf } f) \geq m \cdot c \cdot \delta^{\alpha-1} \geq \left(\frac{b-a}{\delta}\right) \cdot c \cdot \delta^{\alpha-1} = (b-a) \cdot c\, \delta^{\alpha-2}$

Llamando $c' = (b-a) \cdot c$ se termina la demostración de manera análoga a la anterior y se concluye:

$$\underline{\dim}_B(\text{Graf } f) \geq \underline{2-\alpha}$$

■

Veamos entonces que la función de Weierstrass cumple con las hipótesis de las props 1 y 2:

1. Se quiere ver que $w:[c,d]\to\mathbb{R} \mid w(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b^{-\alpha n}\cdot\cos(b^n 2\pi t)$ es α - Hölder

Sea $x, y \in [c,d]$,

i) si $|x-y| \geq 1$ la desigualdad vale trivialmente

ii) si $|x-y| < 1 \Rightarrow y = x+h$ con $0<h<1$ spg
y además $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tq $b^{-(N+1)} < h < b^{-N}$ (1)

$$|w(y)-w(x)| = |w(x+h)-w(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} b^{-\alpha n}\,|\cos(b^n 2\pi(x+h)) - \cos(b^n 2\pi x)| =$$

$(f_n(t) := \cos(b^n 2\pi t)) \longrightarrow$

$$= \sum_{n=0}^{N} b^{-\alpha n}\cdot\underbrace{|f_n(x+h)-f_n(x)|}_{TVM} + \sum_{n=N+1}^{\infty} b^{-\alpha n}\cdot\underbrace{|f_n(x+h)-f_n(x)|}_{<2} \leq$$

$$\leq 2\pi.h.\sum_{n=0}^{N} b^{-\alpha n}\cdot b^n\cdot\underbrace{|\mathrm{sen}(b^n 2\pi \xi)|}_{<1} + 2\cdot\sum_{n=N+1}^{\infty} b^{-\alpha n} \leq$$

$$\leq 2\pi h.\ \frac{1-b^{(1-\alpha)(N+1)}}{1-b^{1-\alpha}} + 2\ \frac{b^{-\alpha(N+1)}}{1-b^{-\alpha}} \leq$$

$$\leq 2\pi.h.b^{N(1-\alpha)}\cdot\underbrace{\frac{\underset{>1}{b}^{\overset{<0}{-N(1-\alpha)}} - b^{1-\alpha}}{1-b^{1-\alpha}}}_{<1} + b^{-\alpha(N+1)}\cdot\frac{2}{1-b^{-\alpha}} \leq$$

$$\leq h.(b^{-N})^{\underset{<0}{\alpha-1}}\cdot 2\pi + (b^{-(N+1)})^{\underset{>0}{\alpha}}\cdot\frac{2}{1-b^{-\alpha}} \leq$$

$$\underset{\text{usando (1)}}{\leq} h.h^{\alpha-1}\,2\pi + h^{\alpha}\cdot\frac{2}{1-b^{-\alpha}} =$$

$$= h^{\alpha}\cdot\underbrace{2\left(\pi+\frac{1}{1-b^{-\alpha}}\right)}_{=c>0}\ ✓$$

■

Al ver que w es α - Hölder se tiene que:

$$\dim_H(\mathrm{Graf}\ w) \leq \overline{\dim}_B(\mathrm{Graf}\ w) \leq 2-\alpha$$

y esto vale para todo valor de b. A continuacion veremos que $\underline{\dim}_B(\mathrm{Graf}\ w) \geq 2-\alpha$ para valores suficientemente grandes de b.
De este modo tendremos la cota superior para $\dim_H(\mathrm{Graf}\ w)$ para cualquier valor de b; mientras que la igualdad $\dim_B(\mathrm{Graf}\ w) = 2-\alpha$ únicamente para valores suficientemente grandes.

2. Se quiere ver que $\exists\ 0<C<\infty,\ \delta_0>0$:

$\forall x \in [c,d] \wedge \forall \delta < \delta_0\ \exists\ y \in [c,d]$ que cumple (a) $|x-y|<\delta$

(b) $|w(y)-w(x)| \geq C.\delta^{\alpha}$.

Sea $x \in [c,d]$, $\delta_0 = b^{-1}$, $0<\delta<\delta_0$. $\Rightarrow \exists\ N \in \mathbb{N}$ tq $b^{-N} < \delta < b^{-(N-1)}$ (2)

Sea $y = x+h$ con $h < b^{-N}$. Tal y cumple (a): $|x-y| \leq h < \delta$ ✓

Faltaría ver que cumple (b):

$$|w(y)-w(x) - b^{-\alpha N}(f_N(y)-f_N(x))| = |w(x+h)-w(x) - b^{-\alpha N}(f_N(x+h)-f_N(x))| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N-1} b^{-\alpha n} |f_n(x+h)-f_n(x)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} b^{-\alpha n} |f_n(x+h)-f_n(x)| \leq$$

usando la misma acot que antes

$$\leq 2\pi \underset{b^{-N}}{\underset{\wedge}{h}} \frac{1-b^{(1-\alpha)N}}{1-b^{1-\alpha}} + b^{-\alpha(N+1)} \cdot \frac{2}{1-b^{-\alpha}} \leq$$

$$\leq 2\pi \frac{b^{-N}-b^{-N\alpha}}{1-b^{1-\alpha}} + b^{-(N+1)\alpha} \frac{2}{1-b^{-\alpha}} \leq$$

$$\leq b^{-\alpha N}\left[2\pi \cdot \frac{b^{N(\alpha-1)}-1}{1-b^{1-\alpha}} + \frac{2 \cdot b^{-\alpha}}{1-b^{-\alpha}}\right] \leq$$

$$\leq b^{-\alpha N} \underbrace{\left[2\pi \cdot \frac{b^{\alpha-1}-1}{1-b^{1-\alpha}} + \frac{2 \cdot b^{-\alpha}}{1-b^{-\alpha}}\right]}_{:= C_1}$$

$$y \quad \lim_{b\to\infty} C_1 = \lim_{b\to\infty} 2\pi \frac{\overset{\to 0}{b^{\alpha-1}}-1}{1-\underset{\to\infty}{b^{1-\alpha}}} + \frac{2\overset{\to 0}{b^{-\alpha}}}{1-\underset{\to 0}{b^{-\alpha}}} = 0$$

Luego, para b suficientemente grande $C_1 \leq \frac{1}{20}$ y

por lo tanto;

$$\frac{1}{20} b^{-\alpha N} \geq |w(x+h)-w(x) - b^{-\alpha N}(f_N(x+h)-f_N(x))| \geq$$

$$\geq \big|\,|w(x+h)-w(x)| - b^{-\alpha N} |f_N(x+h)-f_N(x)|\,\big|$$

$$\Rightarrow \underbrace{b^{-\alpha N}|f_N(x+h)-f_N(x)| - \frac{1}{20} b^{-\alpha N} \leq |w(x+h)-w(x)|} \leq b^{-\alpha N}|f_N(x+h)-f_N(x)| + \frac{1}{20} b^{-\alpha N}$$

$$\Rightarrow |w(x+h)-w(x)| \geq b^{-\alpha N}\Big(\underbrace{|f_N(x+h)-f_N(x)|}_{\to 1/10} - \frac{1}{20}\Big) \geq b^{-\alpha N} \cdot \frac{1}{20} \geq$$

como f_N tiene período b^{-N} en el intervalo $[x, x+b^{-N}]$ se toman todos los valores del coseno. Como $h < b^{-N}$ puedo elegir h tq $|f_n(x+h) - f_N(x)| > 1/10$.

$$\geq \underbrace{b^{-(N-1)\alpha}}_{>\delta} \cdot b^{-\alpha} \cdot \frac{1}{20} \underset{(2)}{\geq} \delta^{\alpha} \cdot \underbrace{\frac{b^{-\alpha}}{20}}_{:= C}$$ ✓

Cota inferior para la $\dim_H(\text{Graf } w)$

Mostraremos finalmente un teorema que nos proporciona una cota inferior para la $\dim_H(\text{Graf } w)$, enunciado originalmente por Mauldin and Williams en 1986 en una versión más general.

Teorema: $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no cte y con derivada continua a trozos tq

- $\|\Phi\| = 1$
- Φ tiene período 1
- $\exists$ un intervalo $I \subset [0,1]$ de longitud $L > 0$ tq $\to$ Φ' es cont en I
  $\hookrightarrow$ $\inf \Phi' \geq \epsilon > 0$ en I

Entonces, $\exists$ una cte $c > 0$ tq si $b \geq \frac{3}{L}$

$$\dim_H(\text{Graf } F) \geq 2 - \alpha - \frac{c}{\ln b} \quad \text{donde} \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-\alpha n} \cdot \Phi(b^n x)$$

En nuestro caso, $\Phi(t) = \cos(2\pi t)$

D/ Para la demostración se usará el ppo de distribución de masa.

Lema: (ppo de distribución de masa)
Sea μ una distribución de masa soportada en F tq para algún s
$\exists\, c > 0,\ \delta > 0$ tq $\mu(U) \leq c \cdot [\text{diam}(U)]^s$ $\forall\, U$ con $\text{diam}(U) < \delta$
Entonces $H^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ $\quad (\Rightarrow s \leq \dim_H(F))$

Bajo las hipótesis del teo se probará que $\exists\, c$ cte y una función $G: [3/L, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ tq $b \geq \frac{3}{L}$ entonces existe un Cantor K subconjunto de $\mathbb{R}$ y una distribución de masa μ soportada en Graf $w|_K$ tq si X es un cuadrado de lado $z < b^{-1}$ con lados paralelos a los ejes de coordenadas, vale que:

$$\mu(X) \leq G(b) \cdot z^{2 - \alpha - \frac{c'}{\ln b}}$$

Aclaración: se usa el ppo con $X = U$ tomando $\text{diam}\, U = \sup_{x, y \in U} \{\|x - y\|_\infty\}$

$$\delta = b^{-1}$$
$$s = 2 - \alpha - \frac{c'}{\ln b}$$
$$c = G(b)$$

Como μ soportada en Graf $w|_K$ $\Rightarrow \dim_H(\text{Graf } w|_K) \geq 2 - \alpha - \frac{c}{\ln b}$

pero Graf $w \supseteq$ Graf $w|_K$ y, por lo tanto,

$$\dim_H(\text{Graf } w) \geq \dim_H(\text{Graf } w|_K) \geq 2 - \alpha - \frac{c}{\ln b}$$

Construcción de K:

Sea I el de las hipótesis

Sea $r = [bL] - 1$

Se definirá un sistema de intervalos $\{J_\sigma : \sigma \in r^*\}$ donde $r^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1, \dots, r\}^n$

- Los primeros J_σ ($|\sigma| = 1$):

  Para cada $1 \le i \le r$,

  $q_i :=$ máx entero del intervalo $b\,[I + (i-1)]$

  y se define

$$J_i = \left[\frac{q_i - r}{b}, \frac{q_i}{b}\right]$$

- Los siguientes J_σ ($|\sigma| > 1$):

  $q_{\sigma * i} :=$ máx entero del inervalo $b\,[I + q_\sigma - r + (i-1)]$

  y se define

$$J_{\sigma * i} = \left[\frac{q_{\sigma * i} - r}{b^{|\sigma|+1}}, \frac{q_{\sigma * i}}{b^{|\sigma|+1}}\right]$$

Ejemplo: $I = \left[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right]$ $L = \frac{1}{4}$

sup $b = 12$

$\Rightarrow r = \left[\frac{12}{4}\right] - 1 = 2.$

$q_1 =$ máx entero de $\underbrace{b \cdot I}_{\left[\frac{15}{2}, \frac{21}{2}\right]} = \underline{10}$

$q_2 =$ máx entero de $\underbrace{b \cdot [I+1]}_{[\cdot\,; \frac{45}{2}]} = \underline{22}$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_1 = \left[\frac{8}{12}, \frac{10}{12}\right] = \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right] \\ J_2 = \left[\frac{20}{12}, \frac{22}{12}\right] = \left[\frac{5}{3}, \frac{11}{6}\right] \end{cases}$$

$q_{11} =$ máx entero de $b \cdot [I + q_1 - 2] = 106$

$q_{12} =$ " " " $b\,[I + q_1 - 2 + 1] = 118$

$q_{21} =$ " " " $b\,[I + q_2 - 2] = 250$

$q_{22} =$ " " " $b\,[I + q_2 - 2 + 1] = 262$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_{11} = \left[\frac{106-2}{12^2}, \frac{106}{12^2}\right] = \left[\frac{13}{18}, \frac{53}{6}\right] \\ J_{12} = \dots \\ J_{21} = \dots \\ J_{22} = \dots \end{cases}$$

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{|\sigma|=n} J_\sigma\right]$$

Notar que en el "nivel n" del Cantor hay r^n intervalos de longitud $\frac{b}{r^n}$

Sea $\tilde{\mu}$ la distribución de masa que puede definirse soportada en el cantor K que cumple que $\tilde{\mu}(J_\sigma) = \frac{1}{r^{|\sigma|}}$. (Es decir, la de repartir la unidad en cada nivel n del cantor)

Se define μ, a partir de ésta, soportada en Graf $w|_K$ como sigue:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$;

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x, y)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t, w(t))\, d\tilde{\mu}$$

Sea X cuadrado de lado z con lados paralelos a los ejes tq $z < b^{-1}$

Para terminar la demostración restaría acotar $\mu(X)$ por $G(b) \cdot z^{2-\alpha} - \frac{c}{\ln b}$

Como $z < b^{-1}$ $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $b^{-(n+1)} \le z < b^{-n}$

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ tq $b^{-\alpha(n+k)} \le z < b^{-\alpha(n+k-1)}$

Sea $s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$,

se define $\#s := \text{card}\, \{\sigma \,/\, |\sigma| = n+s \;\wedge\; w|_{J_\sigma} \cap X \neq \emptyset\}$ ← cantidad de J_σ del nivel $n+s$ tq $w|_{J_\sigma} \cap X \neq \emptyset$

Luego, $\mu(X) = \int_{\mathbb{R}} \chi_X(t, w(t))\, d\tilde{\mu} \leq \#(k-1) \cdot \underbrace{r^{-(n+k-1)}}_{\tilde{\mu}(J_\sigma) \text{ si } |\sigma| = n+k-1}$ (3)

Sea $E_{(n+s)} := \{x \in J_\sigma,\ |\sigma| = n+s \text{ tq } (x, w(x)) \in X\}$

Notar que si $w|_{J_{\sigma * i}} \cap X \neq \emptyset \Rightarrow J_{\sigma*i} \cap E \neq \emptyset$ (pues $J_{\sigma*i} \subset J_\sigma$)

y, además, $J_{\sigma*i}$ son disjuntos. Como $\ell(J_{\sigma*i}) = \frac{r}{b^{n+s+1}}$, E interseca a lo sumo

la siguiente cant: $\frac{\ell(E)}{\frac{r}{b^{n+s+1}}} + 2 \leq \frac{\ell(E)}{\underbrace{r}_{>1}} \cdot b^{n+s+1} + 2 \leq \ell(E) \cdot b^{n+s+1} + 2$ de $J_{\sigma*i}$.

Es decir, la cantidad de $J_{\sigma*i}$ $(1 \leq i \leq r)$ tq $w|_{J_{\sigma*i}} \cap X \neq \emptyset \leq \ell(E) \cdot b^{n+s+1} + 2$.

Por lo tanto, $\#s+1 \leq \left[2 + b^{n+s+1} \cdot H_{(n+s)}\right] \#s$ (4)

donde $H_{(n+s)}$ es la máxima longitud de $E_{(n+s)}$.

Faltaría estimar $H_{(n+s)}$:

$\ell(E_{(n+s)}) = \sup_{x,y \in E_{(n+s)}} |x-y|$;

Defino $g(x) := \sum_{m=0}^{n+s-1} b^{-\alpha m} \cdot \cos(b^m 2\pi x)$

- $\|w - g\|_\infty = \left\| \sum_{m=n+s}^{\infty} b^{-\alpha m} \cdot \cos(b^m 2\pi x) \right\| \leq \sum_{m=n+s}^{\infty} b^{-\alpha m} \underbrace{\|\cos(b^m 2\pi x)\|}_{<1} \leq$

$\leq \frac{b^{-\alpha p}}{1 - b^{-\alpha}} := \tilde{\alpha}$

- si $x \in J_\sigma$ con $|\sigma| = n+s$ $\Rightarrow g'(x) = \sum_{m=0}^{n+s-1} b^{-\alpha m} \cdot b^m \cdot 2\pi \cdot \underbrace{(-\text{sen}\, b^m 2\pi x)}_{\geq \varepsilon > 0}$

$\geq 2\pi\varepsilon \cdot \frac{1 - b^{(1-\alpha)p}}{1 - b^{1-\alpha}}$

Sean $x, y \in E_{(n+s)}$;

por el TVM $|g(x) - g(y)| = g'(\xi) \cdot |x-y|$

$\frac{1 - b^{1-\alpha}}{1 - b^{(1-\alpha)(n+s)}} \cdot \frac{2 + 2\tilde{\alpha}}{2\pi\varepsilon} \overset{(*)}{\geq} \frac{|g(x) - g(y)|}{g'(\xi)} = |x-y|$

$$\left(\circledast\ x,y\in E \Rightarrow w(x), w(y)\in X \Rightarrow |g(x)-g(y)| \leq |g(x)-w(x)| + |w(x)-w(y)| + |w(y)-g(y)| \leq \tilde{\alpha} + z + \tilde{\alpha} \right)$$

Por lo tanto,

$$\ell(E_{(n+s)}) \leq \frac{1-b^{(1-\alpha)}}{1-b^{(1-\alpha)(n+s)}}\,\frac{z+2\tilde{\alpha}}{2\pi\varepsilon} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{3}{2\pi\varepsilon}\,\frac{b^{-\alpha p}}{1-b^{-\alpha}}\cdot\frac{1-b^{1-\alpha}}{1-b^{(1-\alpha)(n+s)}}$$

$$\left(z \leq b^{-\alpha(n+k+1)} \leq b^{-\alpha p} \leq \frac{b^{-\alpha p}}{1-b^{-\alpha}} = \tilde{\alpha} \right)$$

Volviendo a (4), se obtiene:

$$\# s+1 \leq \left[2 + b^{n+s+1}\cdot\frac{3}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{b^{-\alpha p}}{1-b^{-\alpha}}\cdot\frac{1-b^{1-\alpha}}{1-b^{(1-\alpha)(n+s)}} \right] \# s \leq$$

$$\leq \Bigg[b^{1-\alpha}\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{b^{1-\alpha}} + \frac{3}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{b^{(n+s)(1-\alpha)+1}}{1-b^{-\alpha}}\cdot\frac{b^{\alpha-1}-1}{1-b^{(1-\alpha)p}} \right)}_{h_p(b)} \Bigg] \# S$$

$$\text{con } h_p(b) \leq h_1(b) \xrightarrow{b\to\infty} \frac{3}{2\pi\varepsilon b} \leq C_1 < \infty$$

$$\Rightarrow \# s+1 \leq b^{1-\alpha}\cdot C_1\, \# S$$

y además $\# 0 \leq 2$ $\left(\text{pues el lado de } X \text{ tiene longitud } z < b^{-n} \text{ y los } J_\gamma \text{ del nivel } n \text{ tienen longitud } \frac{r}{b^n} \right)$

Sabiendo entonces que:

$$\left.\begin{array}{l} \# 0 \leq 2 \\ \# s+1 \leq C_1 . b^{1-\alpha} . \# S \end{array}\right\} \text{ se obtiene por recursión: } \Rightarrow \# (k-1) \leq 2 . C_1^{k-1} . b^{(1-\alpha)(k-1)}$$

Reescribiendo (3):

$$\mu(X) \leq \# (k-1) . r^{-(n+k-1)} \leq 2 . C_1^{k-1} . b^{(1-\alpha)(k-1)} . r^{-(n+k-1)} \leq$$

$\Bigg($ para terminar la acotación usaremos las desigualdades del principio de la demostración del teo:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ r = [bL-1] \\ \cdot\ b^{-(n+1)} < z < b^{-n} \\ \cdot\ b^{-\alpha(n+k)} < z < b^{-\alpha(n+k-1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} (i) & r^{-1} < \frac{2}{Lb} \\ (ii) & k < 1 + \frac{n(1-\alpha)+1}{\alpha} \\ (iii) & k > \frac{n(1-\alpha)}{\alpha} \end{array}$$

$\Bigg)$

$$\overset{(i)}{\leq} 2 . C_1^{\overset{(ii)}{(k-1)}} . b^{-\alpha \overset{(i)}{(k-1)}} . \left(\frac{2}{L}\right)^{\overset{(ii)}{n+k-1}} . b^{-n} \leq$$

$$\leq 2 . C_1^{\frac{n(1-\alpha)+1}{\alpha}} . \frac{2}{L}^{\frac{n+n(1-\alpha)+1}{\alpha}} . b^{-\alpha\left(\frac{n(1-\alpha)}{\alpha}-1\right)} . b^{-n} \leq$$

$$\leq \underbrace{2\cdot\left(\frac{c_1\cdot 2}{L}\right)^{1/\alpha}}_{:=A}\cdot b^{\alpha}\cdot\underbrace{\left(\left(\frac{2c^{1-\alpha}}{L}\right)^{1/\alpha}\right)^{n}}_{:=B}\cdot \underbrace{b}_{\leq Zb}{}^{-n(1-\alpha+1)} \leq$$

$$\leq A\cdot \underbrace{b^{\alpha}\cdot b}_{<b^2}\cdot B^{n}\cdot Z^{2-\alpha}\leq$$

$$\leq A\cdot b^{2}\cdot B^{n}\cdot Z^{2-\alpha}\leq \leftarrow\left(\begin{array}{l} B^{n}=e^{n\cdot\ln B}<Z^{-\frac{\ln B}{\ln b}} \\ \text{pues } n<-\frac{\ln Z}{\ln b}\end{array}\right)$$

$$\leq \underbrace{A\cdot b^{2}}_{:=G(b)}\cdot Z^{2-\alpha-\frac{\ln B}{\ln b}} \quad c' =$$

$$= G(b)\cdot Z^{2-\alpha-\frac{c'}{\ln b}} \quad C \quad s \checkmark$$

$\blacksquare$

Notar que usando el ppo de distribución de masa la cota inferior para $\dim_H(\text{Graf } w)$ es $2-\alpha-\frac{c'}{\ln b}$ que tiende al valor $2-\alpha$ a valores cada vez más grandes de b.

Referencias

[1] Berry M.V and Lewis Z.V, On the Weierstrass - Mandelbrot fractal function. Proc. Roy. Soc. London A 370; 459 - 484 - 1980

[2] Besicovitch. A. S and Ursell H. D, Sets of fractional dimensions (V): on dimensional numbers of some continuous curves. J London Math. Soc. 32, 142 - 153 - 1937

[3] Falconer K. J, Fractal geometry: Mathematical foundations and Applications. John Wiley & Sons - 1990

[4] Hardy G. H, Weierstrass's non-differentiable function, Trans. Amer Math. Soc. 17. 301 - 325 - 1916.

[5] Mauldin R. D and Williams S. C. On the Hausdorff dimension of some graphs. Trans. Amer. Math. Soc 298, 793 - 804 . - 1986